Übungen zur Höheren Mathematik für Physiker — Blatt 12

— Prof. S. Dittmaier, Universität Freiburg, SS17 —

Aufgabe 12.1 *Dgl.-System vom Fuchsschen Typ* (3 Bonuspunkte)

Wir betrachten das Dgl.-System

$$\mathbf{w}'(z) \;=\; A(z)\,\mathbf{w}(z), \qquad \mathbf{w} \in \mathbb{C}^n, \quad A(z) \in \mathbb{C}^{n\times n}, \quad z \in \overline{\mathbb{C}}, \tag{1}$$

wobei $A(z)$ bis auf isolierte Singularitäten komponentenweise holomorph in z ist.

a) Bei $z = \infty$ liegt genau dann eine isolierte Singularität vor, wenn das durch $\zeta = 1/z$ transformierte Dgl.-System für die Funktion $v(\zeta) = w(1/\zeta)$ bei $\zeta = 0$ eine entsprechende Singularität besitzt. Zeigen Sie, dass die Stelle $z = \infty$ (i) regulär, (ii) schwach singulär, (iii) stark singulär ist, falls in der Laurent-Entwicklung

$$A(1/\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{A}_k\,\zeta^k \tag{2}$$

(i) alle $\tilde{A}_k = 0$ für $k \le 1$, (ii) alle $\tilde{A}_k = 0$ für $k \le 0$ und $\tilde{A}_1 \neq 0$, (iii) nicht alle $\tilde{A}_k = 0$ für $k \le 0$.

b) Zeigen Sie, dass das Dgl.-System genau dann vom Fuchsschen Typ mit schwachen Singularitäten an den (paarweise verschiedenen) Stellen $z_1, \dots, z_p \in \mathbb{C}$ und möglicherweise bei $z = \infty$ ist, wenn

$$A(z) \;=\; \sum_{j=1}^{p} \frac{R_j}{z - z_j}, \tag{3}$$

wobei $R_j \neq 0$ konstante $n \times n$-Matrizen sind.

c) Zeigen Sie, dass für ein Fuchssches Dgl.-System, d. h. mit $A(z)$ wie in (3), der Punkt ∞ genau dann eine schwach singuläre Stelle ist, falls $\sum_{j=1}^{p} R_j \neq 0$.

Aufgabe 12.2 *Dgl. 2. Ordnung Fuchsschen Typs* (3 Bonuspunkte)

Zeigen Sie, dass jede Fuchssche Differentialgleichung 2. Ordnung für eine komplexe Funktion $u(z)$ mit nur einer schwachen Singularität in $\mathbb{C}$ bei z_0 von folgender Form ist:

$$u'' + \frac{r}{z - z_0}\,u' + \frac{s}{(z - z_0)^2}\,u \;=\; 0 \tag{4}$$

mit komplexen Konstanten r, s. Welcher Sonderfall bezüglich der Singularitäten liegt vor, wenn $r = s = 0$, und welcher, wenn $r = 2$, $s = 0$? Geben Sie ein Fundamentalsystem für die Dgl. für alle möglichen Werte von r und s an.

Bitte wenden!

Aufgabe 12.3 *Konfluent hypergeometrische Differentialgleichung* (4 Bonuspunkte)

Die konfluent hypergeometrische Differentialgleichung für eine komplexe Funktion $u(z)$ ist gegeben durch

$$z\,u'' + (c - z)\,u' - a\,u \;=\; 0, \qquad a, c \in \mathbb{C}. \tag{5}$$

a) Welche Singularitäten besitzt die Differentialgleichung? Lösen Sie die Indexgleichungen für die auftretenden schwachen Singularitäten.

b) Lösen Sie die Dgl. mit geeigneten Reihenansätzen $u(z) = z^\lambda\, w(z)$ für $z \in \mathbb{C}$ in der Umgebung von $z = 0$, wobei $w(z)$ eine bei $z = 0$ holomorphe Funktion ist. Drücken Sie die beiden so erhaltenen Lösungen durch die konfluent hypergeometrische Funktion

$${}_1F_1(a, c; z) \;\equiv\; F(a; c; z) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(c)_k\, k!}\, z^k \tag{6}$$

aus, wobei $(x)_k := x(x+1)\cdots(x+k-1)$.

c) Für welche Werte a, c bilden die in b) konstruierten Lösungen ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung? Wie ist die Struktur eines Fundamentalsystems für die übrigen Fälle?